

4.4 Systèmes de coordonnées

Rappel

Soient $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$ donnée par

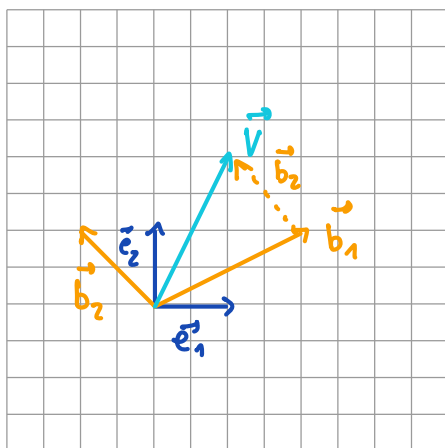
$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^2$. Pour le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, on a les combinaisons linéaires

$$\vec{v} = 1\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \text{ et } \vec{v} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2. \quad (\neq)$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

↑ / $\mathcal{E}$
par rapport à la
base canonique



les coeff. de la comb. lin. dans
la base canonique $\mathcal{E}$ donnent
les composantes de $\vec{v}$.

Dans $\mathcal{B}$, les composantes de $\vec{v}$ sont
différentes :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{ou} \quad [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(l'ordre des vecteurs de la base
est important !)

Théorème 36. Soient V un espace vectoriel et soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de V . Alors pour tout $v \in V$ il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ uniques tels que

$$v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$$

v est comb. lin. des vecteurs de $\mathcal{B}$ et les coefficients
sont uniques.

Définition 44 (composantes dans une base).

Les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont les composantes/coordonnées de l'élément v dans la base $\mathcal{B}$. On note

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} /_{\mathcal{B}}$$

Exemples

1) $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ base can. de $\mathbb{P}_2$

$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ s'écrit $[p]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

2) On peut définir la notion de base plus généralement et montrer que

$\mathcal{E} = (1, t, t^2, t^3, \dots)$ est une base de $\mathbb{P}$

3) $\mathcal{B} = (1+t, -1, t^2)$ est une base de $\mathbb{P}_2$ (à vérifier !)

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = a_1(1+t) + (a_1 - a_0)(-1) + a_2 t^2$$

$$\text{et } [p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 - a_0 \\ a_2 \end{pmatrix} = [p(t)]_{\mathcal{B}} \quad (*)$$

Par exemple,
$$\left[-1 + 2t - \frac{1}{2}t^2 \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

L'application coordonnée

Définition 45 (application coordonnée).

Soient V un espace vectoriel et soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de V . On définit l'application coordonnée

$$[\]_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$v \longmapsto [v]_{\mathcal{B}}$$

$$\text{Si } v = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i, \text{ alors } [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Théorème 37. L'application $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ est linéaire et bijective.

Preuve

1) à montrer : $[\alpha v + \beta w]_{\mathcal{B}} = \alpha [v]_{\mathcal{B}} + \beta [w]_{\mathcal{B}}. (*)$

Prenons $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$, $w = \sum_{i=1}^n \beta_i b_i$. Alors

$$\underline{\alpha v + \beta w} = \alpha \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \right) + \beta \left(\sum_{i=1}^n \beta_i b_i \right)$$

$$\stackrel{V \text{ ev.}}{=} \sum_{i=1}^n (\alpha \alpha_i) b_i + \sum_{i=1}^n (\beta \beta_i) b_i$$

$$\stackrel{V \text{ ev.}}{=} \sum_{i=1}^n (\underline{\alpha \alpha_i + \beta \beta_i}) \underline{b_i} \quad (*) \quad \mathbb{R}^n \text{ ev.}$$

$$\alpha [v]_{\mathcal{B}} + \beta [w]_{\mathcal{B}} = \alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \stackrel{\downarrow}{=} \begin{pmatrix} \alpha \alpha_1 + \beta \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha \alpha_n + \beta \beta_n \end{pmatrix}$$

$$= [\alpha v + \beta w]_{\mathcal{B}}$$

2) Pour $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, on prend $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$. Alors

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}. \text{ Donc } [\]_{\mathcal{B}} \text{ est surjective.}$$

3) Pour $v \in V$, on a $[v]_{\mathcal{B}} = \vec{0}_{\mathbb{R}^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$v = 0 b_1 + \dots + 0 b_n = 0_V.$$

$\Rightarrow$ Un EV admettant une base de n éléments peut être assimilé à $\mathbb{R}^n$

Définition 46 (Isomorphisme).

Soient V et W deux espaces vectoriels et $T : V \rightarrow W$ une application linéaire bijective. Alors T est dit un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Exemple $\mathbb{P}_3$ est isomorphe à $\mathbb{R}^4$

Application: Pour étudier l'indép. lin. de s

$$p(t) = 1 + 2t - t^3 \text{ et } q(t) = t - t^2 - 2t^3$$

on peut soit résoudre $\alpha p(t) + \beta q(t) = 0$ / soit étudier l'indép. lin. des vecteurs

$$[p(t)]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } [q(t)]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ dans } \mathbb{R}^4.$$

Changement de bases

Exemple

Reprenons les bases $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ de l'exemple

ci-dessus et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = [\vec{v}]_{\mathcal{E}}$. On a $[\vec{b}_1]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $[\vec{b}_2]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On veut $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$, i.e. $\vec{v} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad /_{\mathcal{E}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$[\vec{b}_1]_{\mathcal{E}} [\vec{b}_2]_{\mathcal{E}} [\vec{v}]_{\mathcal{B}} [\vec{v}]_{\mathcal{E}}$$

La matrice obtenue s'appelle matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ (départ) à $\mathcal{E}$ (arrivée), notée $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$.

On a $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [\vec{b}_1]_{\mathcal{E}} & [\vec{b}_2]_{\mathcal{E}} \end{pmatrix}$. En résolvant l'éq.

matricielle $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = [\vec{v}]_{\mathcal{E}}$ on obtient $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & -8/3 \end{array} \right).$$

Si on cherche $[\vec{v}]_{\mathcal{E}}$ et que $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ est connu, il suffit

d'effectuer $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = [\vec{v}]_{\mathcal{E}} : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ -8/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = [\vec{v}]_{\mathcal{E}}$.

Remarque: Pour trouver $[v]_{\mathcal{B}}$, on peut

- remarquer que $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ est inversible, d'où

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1} [\vec{v}]_{\mathcal{E}}. \quad \text{Ici } P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -8/3 \end{pmatrix}.$$

- utiliser le chgt de base "inverse"

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} [\vec{v}]_{\mathcal{E}} = [\vec{v}]_{\mathcal{B}} \quad \text{avec}$$

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} [\vec{e}_1]_{\mathcal{B}} & [\vec{e}_2]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1} = P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$$

Généralisation à un espace vectoriel V quelconque

Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de V .

Changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$

Théorème 38. Soient V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ et $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ deux bases de V . Alors il existe une unique matrice $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ telle que

La matrice $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ est donnée par

De plus, elle est inversible d'inverse $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ où

Exemple

4.5 Dimension d'un espace vectoriel

Théorème 39. *Soient V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de V . Alors toute famille d'éléments de V avec plus de n éléments sera linéairement dépendante.*

Théorème 40. *Soient V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de V . Alors toute autre base de V possède exactement n éléments.*

Définition 47 (dimension).

Soit V un espace vectoriel.

1. Si V admet une famille génératrice avec un nombre fini d'éléments, on dira que V est de dimension finie. On notera sa dimension $\dim V$, où $\dim V$ est le nombre d'éléments dans une base quelconque de V .
2. Si V n'admet pas de famille génératrice finie, on dira que V est de dimension infinie et on note $\dim V = \infty$.
3. Si $V = \{0_V\}$, alors on dira que $\dim V = 0$.

Exemples

Théorème 41 (Base incomplète).

Soient V un espace vectoriel de dimension finie et W un sous-espace vectoriel de V . Alors toute famille d'éléments linéairement indépendants de W peut être complétée en une base de W (et aussi de V). On a que

Exemple

Théorème 42. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie avec $\dim V = n$ pour $n \geq 1$. Alors*

- 1. Toute famille linéairement indépendante d'exactly n éléments est une base de V .*
- 2. Toute famille génératrice formée d'exactly n éléments est une base de V .*

Dimension de $\text{Ker}(A)$ et de $\text{Im}(A)$

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ avec $A = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n)$.

Définition 48 (rang).

Soient V, W des espaces vectoriels et soit $T : V \rightarrow W$ une transformation linéaire. On appelle *rang* de T la dimension de $\text{Im}(T)$.

Si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est linéaire et si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ est la matrice canoniquement associée à T , on a $\text{Im}(T) = \text{Im}(A)$. On parlera alors du rang de A .

Exemple

Théorème 43 (du rang).

1. Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Alors

2. Soit $T : V \rightarrow W$ où V et W sont des espaces vectoriels avec V tel que $\dim(V) = n$.

Exemple

Théorème 44 (Suite du théorème 23).

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.

2.

3.

4.

Espaces des lignes de A et $A^\top$

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Définition 49 (espace des lignes).

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par les lignes de A s'appelle l'espace des lignes et est donné par

Remarque

Théorème 45. *Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ une matrice.*

- 1. Si B est une matrice équivalente à A selon les lignes, alors leurs lignes engendrent le même espace.*
- 2. On a*

Preuve

Exemple

Remarque

4.6 Matrices d'applications linéaires et application coordonnée

Soient V, W des espaces vectoriels, $T : V \rightarrow W$ une application linéaire et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ resp. $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ des bases de V et W .

Au niveau des coordonnées, l'application T est représentée par une matrice $M \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ telle que

On dira que M représente T dans les bases $\mathcal{B}$ (de départ) et $\mathcal{C}$ (d'arrivée).
Déterminons les coefficients de la matrice M :
Soit $v \in V$ avec $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$, autrement dit

Alors par linéarité de T , on a

$$T(v) = T(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n) = \alpha_1 T(b_1) + \dots + \alpha_n T(b_n).$$

Par linéarité de l'application coordonnée, il vient :

Remarques

Exemple

Remarque